

GRÁFICOS CUSUM:

Monitorización para un aseguramiento continuo de la Calidad

La necesidad de mantener de forma continua el Aseguramiento de la Calidad ha llevado a las empresas a adoptar métodos estadísticos para la monitorización de sus procesos. El gráfico de control de Shewhart es la técnica más utilizada. Este gráfico utiliza la información recogida en cada instante a través de una pequeña muestra o valor individual, para decidir si el proceso está *bajo control* comprobando si la media de esa muestra está dentro de los *límites de control*. Estos gráficos son sencillos de construir y de rápida interpretación pero son poco eficaces cuando el proceso sufre pequeñas variaciones. Por esta razón, se han desarrollado otro tipo de gráficos de control que en cada instante utilizan no sólo los valores obtenidos en ese momento sino toda la información anterior, de manera que son mucho más sensibles a cualquier pequeño cambio que se produzca. Estos gráficos son: Gráficos de Medias Móviles, Gráficos de Medias Móviles Geométricas y Gráficos Cusum.

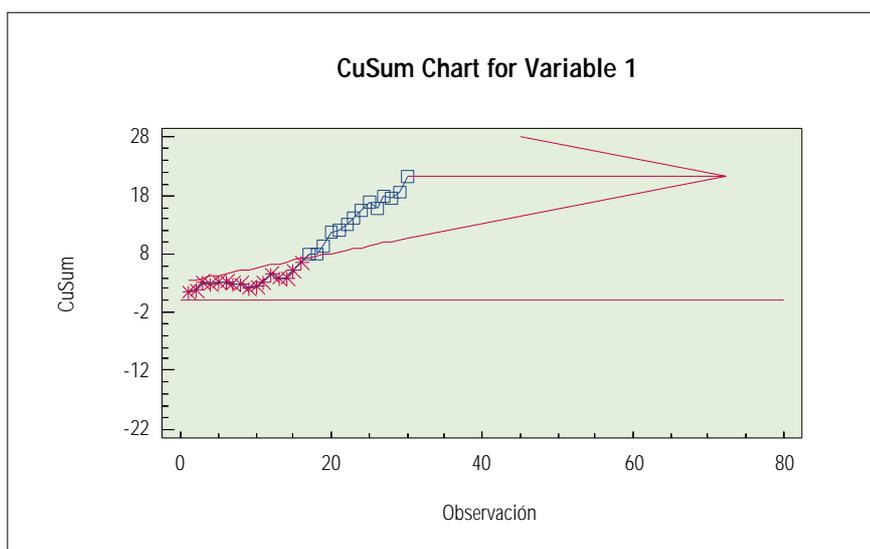
La primera descripción detallada de los procedimientos Cusum aparece en 1954 en el artículo *Continuos Inspection Schemes*, debido a Page. En los últimos años, han

tenido un gran desarrollo tanto en la base teórica de estos procedimientos como en su utilización en distintos campos.

La idea fundamental de estos gráficos es calcular para cada observación, x_i , su desviación de la media objetivo μ , e ir acumulando estas desviaciones $(x_i - \mu)$ desde el principio hasta el instante actual,

$$S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

Observemos que si el proceso está bajo control la media es μ y las diferencias $(x_i - \mu)$ serán pequeños valores positivos y negativos alrededor de cero de forma que su suma será un valor próximo a cero. Cuando el proceso sale fuera de control porque, por ejemplo, ha habido un aumento en la media, los valores observados serán, prácticamente, todos mayores que μ , las diferencias $(x_i - \mu)$ serán positivas y al acumularlas veremos un claro aumento en la pendiente. La figura muestra un gráfico Cusum para controlar la media de un proceso. Ha habido un aumento en la media del proceso a partir de la observación 15. Este cambio se detecta en el gráfico porque observamos un claro aumento en la pendiente de la gráfica a partir de dicha observación.



Ésta es la primera forma de aplicación de los gráficos de sumas acumuladas: la V-máscara que se obtiene situando una "máscara en forma de V" en la última observación obtenida. Esta expresión gráfica tiene algunos inconvenientes para trabajar con ella numéricamente, por ello, posteriormente se ha desarrollado una fórmula numérica equivalente a la V-máscara y cuya representación gráfica es más sencilla. Se trata del Intervalo de Decisión o Gráfico Cusum H-K. Veamos, brevemente, cómo se construyen e interpretan estos dos tipos de gráficos.

El gráfico de V-máscara

Recordemos que el objetivo de estos gráficos es detectar variaciones en la media de amplitud $\Delta = \pm \delta \sigma_X$ donde σ_X es la desviación típica de la variable en estudio X . Para ello, definimos:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

- δ = Variación en la media que deseamos detectar medida en unidades de desviación típica. Por ejemplo, Si deseamos detectar un aumento o descenso de 3 unidades y $\sigma_X = 1.5$ entonces $\delta = 3/1.5 = 2$

- α = Probabilidad de una *falsa alarma*. Valores habituales para α son 0,01 ó 0,05.
- β = Probabilidad de no detectar un cambio en la media de la magnitud fijada. Valores habituales para β son 0,01 ó 0,05.
- m = Última observación.

A partir de estos valores dibujaremos la V-máscara mediante las rectas:

$$-\frac{\delta}{2}n + \frac{1}{\delta} \log \frac{1-\beta}{\alpha} + S_m + \frac{\delta}{2}m$$

$$\frac{\delta}{2}n - \frac{1}{\delta} \log \frac{1-\beta}{\alpha} + S_m - \frac{\delta}{2}m$$

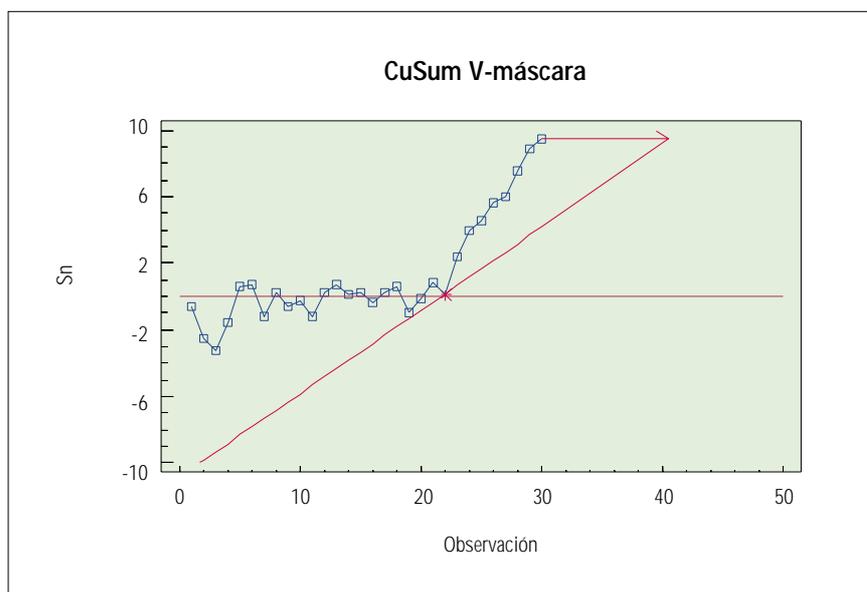
Cuyo vértice está a una distancia d del punto de coordenadas (m, S_m) , donde

$$d = \frac{2}{\delta^2} \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right)$$

La metodología a seguir para detectar estas variaciones será la siguiente:

- Tomamos m observaciones y situamos la *máscara* en el punto de coordenadas (m, S_m)
- Representamos los valores (n, S_n) con $n = 1 \dots m$
- Si ningún punto sale fuera de la máscara seguiremos haciendo un muestreo y nuestro proceso está bajo control
- Si un punto se sale por arriba, en ese instante se ha producido un descenso en la media de amplitud Δ
- Si un punto se sale de la máscara por debajo, en ese instante ha habido un aumento en la media de amplitud Δ

Como vemos gráficamente:





En este ejemplo, al situar la V-máscara en la observación $m=30$, detectamos que ha habido un aumento en la media a partir de la observación $n=22$ que se sale fuera de los límites.

El Intervalo de Decisión: una alternativa a la V-máscara

Uno de los inconvenientes de la V-máscara es que hay que situarla en cada uno de los puntos (n, S_n) para detectar si se ha producido un cambio y dónde se ha producido. Hay otra expresión algebraica equivalente a la V-máscara que permite trabajar con los gráficos de sumas acumuladas, Cusum, que es más sencilla de ver gráficamente porque los límites de control son constantes. Además, tiene ciertas ventajas de cálculo en la obtención de las características de operación como el número medio de muestras entre falsas alarmas o el tiempo medio transcurrido hasta que detectamos un cambio desde que éste se produce. Este tipo de representación se llama el Intervalo de Decisión (DI) o Cusum $H - K$.

- K : Valor de referencia. En la V-máscara es la pendiente de las rectas, una positiva y otra negativa. En ambos gráficos, su interpretación es muy sencilla puesto que $2K = \delta$ es la amplitud del sesgo en la media que deseamos detectar medida en unidades de desviación estándar.
- $H = H^+ = H^-$: Intervalo de Decisión. Es el valor que determina los límites fijos del gráfico $H - K$. Se calcula a partir de la probabilidad de error de tipo I, α , y de la probabilidad de detectar un cambio de la magnitud deseada, $(1 - \beta)$, puesto que

$$H = \frac{1}{\delta} \log \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

La idea general para pasar de un gráfico a otro es corregir las diferencias $(x_i - \mu)$ por el valor de referencia

$$K = \frac{\delta}{2}$$

que es la pendiente de las rectas de la V-máscara y así la región de aceptación vendrá limitada por dos rectas de pendiente cero.

Sea x_t el valor en el instante t e y_t la diferencia entre la t -ésima observación y el valor objetivo $y_t = (x_t - \mu)$ (representada en el gráfico por los cuadraditos). Entonces para detectar aumentos en la media calcularemos:

$$\left. \begin{aligned} S_t^+ &= \max(0, S_{t-1}^+ + y_t - k) \\ S_0^+ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

se produce una señal si $S_t^+ > H$.

Análogamente, para detectar sesgos negativos tendremos:

$$\left. \begin{aligned} S_t^- &= \min(0, S_{t-1}^- + y_t + k) \\ S_0^- &= 0 \end{aligned} \right\}$$

se produce una señal si $S_t^- < -H$.

De esta forma, si representamos los puntos de coordenadas (t, S_t^+) y (t, S_t^-) mediante la altura de las barras, tendremos un gráfico con límites constantes ente equivalente a la V-máscara.

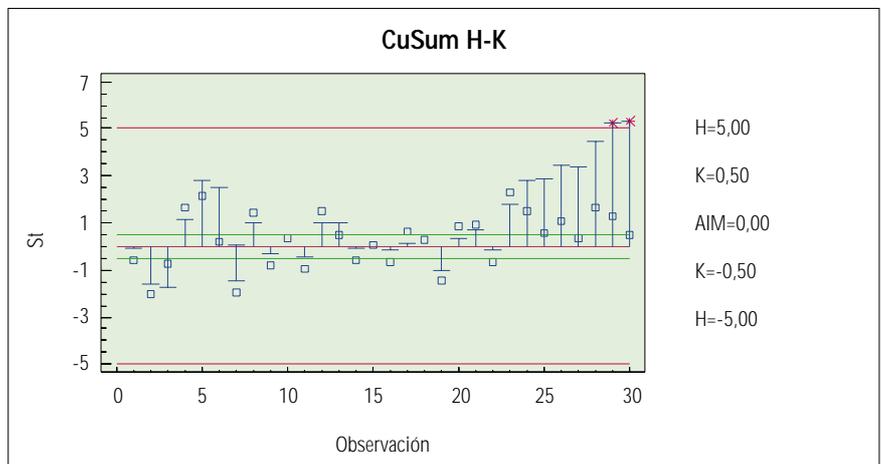
En el ejemplo, en la observación 29 detectamos que ha habido un aumento en la media a partir de la observación $n=22$ último valor donde $S_t^+ = 0$ a partir del cual hay una clara tendencia creciente en las sumas acumuladas.

¿Cómo debemos elegir los parámetros que determinan el gráfico?

El valor de referencia $K = \frac{\delta}{2}$ viene

determinado por la magnitud del sesgo que deseamos detectar. En ocasiones este valor nos viene dado por especificaciones técnicas: nivel de contaminación que se considera peligroso, valor de la presión en algún proceso a partir del cual la máquina no funciona bien, etc. En otros casos, en donde no está especificado el valor de K , éste debe elegirse de forma que la detección de un sesgo sea lo más rápida posible. Valores habituales para K van desde 1/4 hasta 3, pero su elección debe venir determinada por las características del proceso.

En cuanto al Intervalo de Decisión H , su valor viene determinado, para un sesgo fijo a detectar d , por la probabilidad de error de tipo I, α , o, dicho de otra forma, por la probabilidad de que se produzcan "falsas



alarmas" en el funcionamiento del gráfico en condiciones de control y por $1 - \beta$, probabilidad de detectar un cambio en la media.

Ventajas de los gráficos Cusum frente a los Shewhart

- Fijamos la magnitud del cambio que deseamos detectar como mínimo.
- Detecta los cambios de pequeña magnitud más rápido que otros gráficos.

- Fijamos tanto la probabilidad de que se produzcan falsas alarmas como el tiempo medio que tardamos en detectar un cambio.
- Detectamos el momento a partir del cual se produce el cambio.
- Podemos estimar la magnitud del sesgo producido.

Campos de aplicación

La especial eficacia de los gráficos Cusum para detectar rápidamente pequeñas desviaciones hace que sean especialmente útiles en procesos de alta especialización como los sanitarios, en donde se aplica con éxito tanto para el aseguramiento de la

calidad de los servicios médicos como para la detección rápida de señales en procedimientos médicos de campos como la neurología o la cardiología.

En su aplicación como detector rápido de cambios es utilizado tanto en unidades de control sísmico como en departamentos de análisis de series financieras.

Como herramienta para el aseguramiento continuo de la calidad está siendo muy utilizada en el campo de la informática. Primero en el control de fabricación de semiconductores o equipos técnicos y finalmente en el control de producción de Software.

Pero la aplicación más "curiosa" es la utilizada por los "detectives literarios" en la Estilometría donde esta técnica, con algunas variaciones, se ha comprobado que es un método objetivo y eficaz para la determinación del autor para textos no catalogados de la literatura clásica o para el control de los plagios. **Q**

JUANA M. ALONSO REVENGA / Profesor Titular de la Escuela Universitaria de Estadística. Universidad Complutense de Madrid. Miembro del "Equipo de trabajo de Control Estadístico de la Calidad".

Bibliografía:

- (1) Hawkins, D.M. & Olwell, D.H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer.
- (2) Montgomery D. C. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- (3) Van Dobben de Bruyn, C.S. (1968). *Cumulative Sum Test: Theory and Practice*. Griffin's Statistical Monographs and Courses

